Вариант 22

Задача 1

Найдите наилучший гарантированный результат F_1 и все оптимальные стратегии 1ого игрока иерархической игры $Г_1$ для биматричной игры $Г$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \max_{1 \le i \le 5} \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \operatorname{Arg} \max_{1 \le j \le 6} b_{ij}$$

$$W(i) = \min_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$Y(1) = \{2, 3\}$ ← в м. B, 1строке ищем max эл-ты и записываем их номера

$Y(2) = \{1, 5, 6\}$

$Y(3) = \{2, 6\}$

$Y(4) = \{6\}$

$Y(5) = \{1, 5\}$

$$W(1) = \min_{j \in Y(1)} a_{1j} = \min\{\overset{=2}{a_{12}}, \overset{=2}{a_{13}}\} = 2$$

$W(2) = 0$

$W(3) = 1$

$W(4) = 1$

$W(5) = 0$

$\Downarrow$

$F_1 = \max\limits_{1 \le i \le 5} W(i) = 2 \Rightarrow \underline{i^\circ = 1}$ – $\underline{\text{оптим. страт.}}$

$\underline{F_1 = 2}$ – наил. гарант. рез.

Вариант 22

Задача 2

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{5} & \cancel{9} & \cancel{2} \\ 6 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 9 & 3 \\ \cancel{7} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{6} \end{pmatrix}$$

Найдите решение в смеш. стратегиях

Строка дом-ется из вып. мн. комб. ост. =>
=> ее можно вычеркнуть

Столбец дом-ет из вып. мн. комб. ост. =>
=> его можно вычеркнуть

---

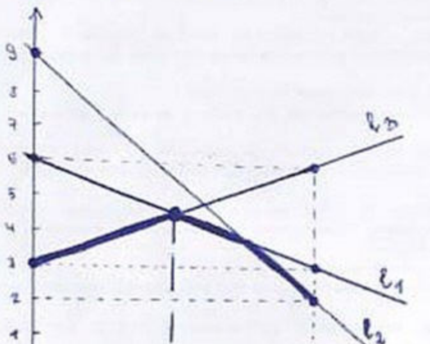
1) 1 строка ≤ 3 строка => вычеркив. 1 строку
2) [рассм. оставшуюся матрицу, нумерацию сохраним]
   1 столбец ≥ 4 столбец => вычерк. 1 столбец
3) [...] 4 строка ≤ 2 строка => вычерк. 4 строку

Теперь рассм. матрицу:

$$\hat{A} = \begin{array}{c} \hat{p}_1 \\ 1-\hat{p}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Рассм. прямые $l_j(\hat{p}_1) = \hat{a}_{1j} \cdot \hat{p}_1 + \hat{a}_{2j} \cdot (1-\hat{p}_1)$ =>

$$l_1(\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 6(1-\hat{p}_1) = -3\hat{p}_1 + 6$$
$$l_2(\hat{p}_1) = 2\hat{p}_1 + 9(1-\hat{p}_1) = -7\hat{p}_1 + 9$$
$$l_3(\hat{p}_1) = 6\hat{p}_1 + 3(1-\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 3$$



Строим нижнюю огибающую (—)

Находим ее точку max:

$\hat{p}_1^0 = l_1 \wedge l_3$

$-3\hat{p}_1 + 6 = 3\hat{p}_1 + 3$

$\Downarrow$ $6\hat{p}_1 = 3$

$\Downarrow$ $\hat{p}_1^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{p}^\circ = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ← это для м. $\hat{A}$

Находим $\hat{q}^\circ$:

$k_{j_1}\hat{q}^* + k_{j_2}(1-\hat{q}^*) = 0$

$\hat{p}_1^\circ = l_1 \cap l_3 \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \Rightarrow k_{j_1} = -3 \\ j_2 = 3 \Rightarrow k_{j_2} = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -3\hat{q}^* + 3(1-\hat{q}^*) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6\hat{q}^* - 3 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{q}^\circ = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

Тогда: $\boxed{p^\circ} = (0, \hat{p}_1^\circ, \hat{p}_2^\circ, 0) = \underbrace{\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)}$,

$\boxed{q^\circ} = (0, \hat{q}_1^\circ, \hat{q}_2^\circ, \hat{q}_3^\circ) = \underbrace{\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)}$,

$\boxed{v} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p_i^\circ a_{ij} q_j^\circ = \sum_{i=1}^{4}\left(p_i^\circ a_{i2}\cdot\frac{1}{2} + p_i^\circ a_{i4}\cdot\frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{1}{4}a_{22} + \frac{1}{2}a_{24} + \frac{1}{4}a_{32} + \frac{1}{4}a_{34} =$

$= \frac{1}{4}(3+6+6+3) = \boxed{\frac{9}{2}}$

Вариант 22

Задача 3

Найдите минимакс и минимаксную стратегию игры на прямоугольнике:

$$F(x,y) = 3x^2 - 6xy - y^2 - 2x + y$$

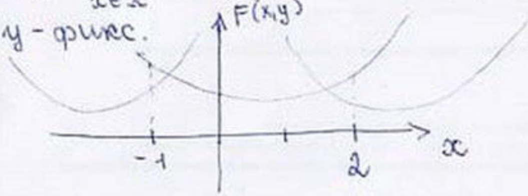
$$X = [-1,2], \quad Y = [-1,1]$$

$$\bar{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x,y)$$

$y^0 \in Y$ - минимакс. стратегия, если $\sup_{x \in X} F(x, y^0) = \bar{v}$

$$M(y) = \sup_{x \in X} F(x, y) = F(x(y), y)$$

y - фикс.



$$M(y) = \max\{F(-1,y);\ F(2,y)\} =$$

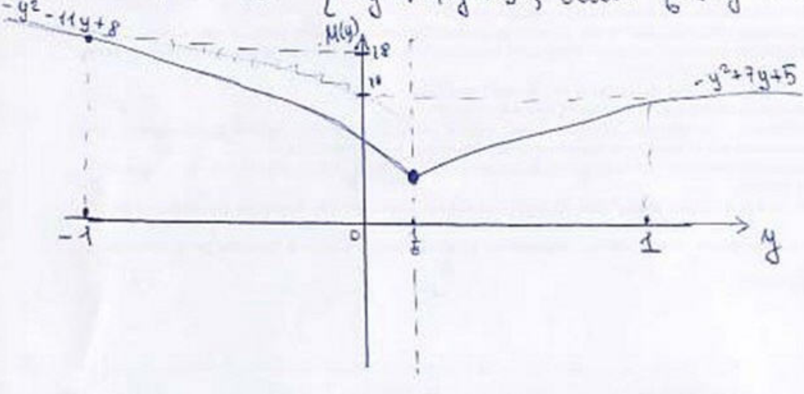
$$= \max\{-y^2+7y+5;\ -y^2-11y+8\}$$

$$-y^2+7y+5 \le -y^2-11y+8$$

$\Updownarrow$ $18y < 3$

$\Updownarrow$ $y < \frac{1}{6}$

Значит, $M(y) = \begin{cases} -y^2-11y+8, & \text{если } -1 \le y < \frac{1}{6} \\ -y^2+7y+5, & \text{если } \frac{1}{6} \le y < 1 \end{cases}$



в т. $y = -1$: $-y^2 - 11y + 8 = -1 + 11 + 8 = 18$

в т. $y = 1$: $-y^2 + 7y + 5 = -1 + 7 + 5 = 11$

вершина $-y^2 - 11y + 8$: $-\frac{-11}{2\cdot(-1)} = -\frac{11}{2} = -5.5$

вершина $-y^2 + 7y + 5$: $-\frac{7}{2\cdot(-1)} = \frac{7}{2} = 3.5$

в т. $y = \frac{1}{6}$: $-\frac{1}{36} + \frac{7^{\backslash 6}}{6} + 5 = 5 + \frac{41}{36} = \frac{180 + 41}{36} = \frac{221}{36} = 6\frac{5}{36}$

$M(y)$ на $[-1, 1]$ достиг. min в т. $y^0 = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{y^0 = \frac{1}{6}}$ – минимакс. стратегия

$\boxed{\overline{v} = 6\frac{5}{36}}$ – минимакс

Вариант 23

Задача 1

Найдите все равновесия по Шт.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Равнов. по Шт.: (i^0, j^0): $w'(i^0) = \max\limits_{1 \le i \le 5} w'(i) = F'$

$$w'(i) = \max_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$Y(i) = \operatorname{Arg} \max_{1 \le j \le 6} b_{ij}$$

$i = 1 \Rightarrow Y(1) = \{1, 3\} \leftarrow b_{11}, b_{13}$

$i = 2 \Rightarrow Y(2) = \{4\} \leftarrow b_{24}$

$i = 3 \Rightarrow Y(3) = \{6\} \leftarrow b_{36}$

$i = 4 \Rightarrow Y(4) = \{1\} \leftarrow b_{41}$

$i = 5 \Rightarrow Y(5) = \{1, 4, 6\} \leftarrow b_{51}, b_{54}, b_{56}$

$$w'(1) = \max_{j \in \{1,3\}} a_{1j} = \max\{1, 4\} = 4$$

$w'(2) = 0 \quad (= a_{24})$

$w'(3) = 0 \quad (= a_{36})$

$w'(4) = 1 \quad (= a_{41})$

$$w'(5) = \max\{\underset{a_{51}}{\overset{\shortparallel}{1}}, \underset{a_{54}}{\overset{\shortparallel}{2}}, \underset{a_{56}}{\overset{\shortparallel}{1}}\} = 2$$

$\Downarrow$

$$w'(i^0) = \max\{4, 0, 0, 1, 2\} = 4$$

$\Downarrow$

равнов. по Шт.: $(i^0, j^0) = (1,2) \quad (5,2)$
$(1,3) \quad (5,3)$
$(1,4)$
$(4,2)$
$(4,6)$

Вариант 23

Задача 2

Найдите решение в смешанных стратегиях матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

---

a доминирует b, если $a_i \geq b_i$

Строка дом-ется нез вып. лин. комбинацией ост., то ее можно вычеркнуть

Столбец дом-ет нез вып. лин. комбинацией ост., то его можно вычеркнуть.

Считаю, что здесь надо найти хотя бы 1 оптим. смеш. стратегию.
(Может, надо все?)

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} \\ \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{3} \\ \cancel{5} & 1 & 5 & \cancel{1} \\ \cancel{4} & 5 & 3 & \cancel{5} \end{pmatrix}$$

1) 1 строка дом-ся (<) $\frac{1}{2}$ (2 стр.) + $\frac{1}{2}$ (4 стр.) =>
=> вычерк. 1 строку

2) [теперь рассм. оставшуюся матрицу, но нумерацию для удобства сохраним прежнюю]
1 столбец дом-ет ($\geq$) 3 столбец =>
=> вычерк. 1 столбец

3) [...] 4 столбец дом-ет ($\geq$) 2 столбец (например, так) =>
=> вычерк. 4 столбец

4) [...] 2 строка дом-ся ($\leq$) $\frac{1}{2}$ (3 стр.) + $\frac{1}{2}$ (4 стр.) =>
=> вычерк. 2 строку

$\Downarrow$

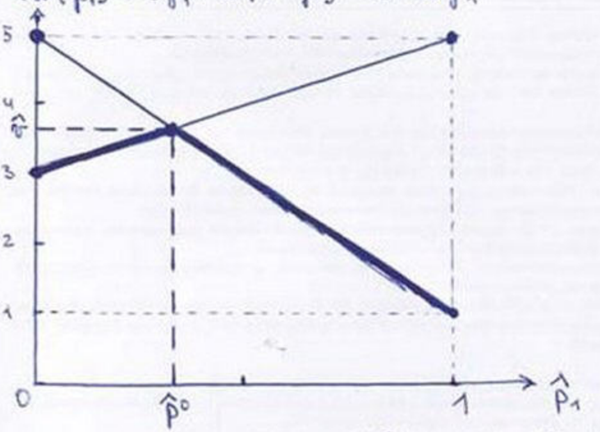
⇓ Теперь рассм. матрицу $\hat{A} = \begin{array}{c|cc} & q^* & 1-q^* \\ \hline p_1 & 1 & 5 \\ 1-p_1 & 5 & 3 \end{array}$

$\hat{v} = \max\limits_{0 \le p \le 1} \min\limits_{1 \le j \le 2} [\hat{a}_{1j}\hat{p}_1 + \hat{a}_{2j}(1-\hat{p}_1)]$

Рассм. прямые $l_j(\hat{p}_1) = \hat{a}_{1j}\hat{p}_1 + \hat{a}_{2j}(1-\hat{p}_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow l_1(\hat{p}_1) = \hat{p}_1 + 5(1-\hat{p}_1) = 5 - 4\hat{p}_1$

$l_2(\hat{p}_1) = 5\hat{p}_1 + 3(1-\hat{p}_1) = 3 + 2\hat{p}_1$



Строим нижнюю огибающую (см. рис. – „▬") $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ находим ее точку max:

$5 - 4\hat{p}_1 = 3 + 2\hat{p}_1$

$\Downarrow$ $6\hat{p}_1 = 2 \Rightarrow \hat{p}_1^0 = \frac{1}{3} \Rightarrow \hat{p}^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ← это для м. $\hat{A}$

Находим $\hat{q}^0$:

$k_{j_1}\hat{q}^* + k_{j_2}(1-\hat{q}^*) = 0$

$\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_2 \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \Rightarrow k_{j_1} = -4 \\ j_2 = 2 \Rightarrow k_{j_2} = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -4\hat{q}^* + 2(1-\hat{q}^*) = 0 \Rightarrow 6\hat{q}^* = 2 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{q}^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ← это для м. $\hat{A}$

Тогда: $\underline{p^0} = (0, 0, \hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0) = \underline{\left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}$ ← это уже для м. A

$\underline{q^0} = (0, \hat{q}_1^0, \hat{q}_2^0, 0) = \underline{\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)}$

$v = \sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4} p_i^0 a_{ij} q_j^0 = \sum\limits_{i=1}^{4}\left(p_i^0 a_{i2}\cdot\frac{1}{3} + p_i^0 a_{i3}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}a_{32} + \frac{2}{9}a_{33} + \frac{2}{9}a_{42} + \frac{4}{9}a_{43} =$

$= \frac{1}{9}\cdot 1 + \frac{2}{9}\cdot 5 + \frac{2}{9}\cdot 5 + \frac{4}{9}\cdot 3 = \frac{1}{9} + \frac{10}{9} + \frac{10}{9} + \frac{12}{9} = \frac{33}{9} = \frac{11}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{v = \frac{11}{3}}$

Вариант 23

Задание 3

Используя соображения доминирования, найдите ситуации равновесия в смешанных стратегиях:

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{5} \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & 7 & 7 \\ \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{5} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{3} \\ 7 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 7 & 3 \\ \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{6} \end{pmatrix}$$

Если в A строка строго дом-ется (<) выпукл. лин. комбинацией остальных, то она входит с нулевой вер. в $\forall$ оптим. смеш. страт. 1ого игрока (т.е. ее можно вычеркнуть)

Если в B столбец строго дом-ется (<) вып. лин. комб. ост., то он входит с 0 вер. в $\forall$ опт. смеш. страт. 2ого игр. (т.е. его можно вычеркнуть)

---

1) в A: 1 строка $(3\ 2\ 5\ 5)$ $< \frac{1}{2}$ (2 стр.) $+ \frac{1}{2}$ (3 стр.) $(4\ 2.5\ 6.5\ 6.5)$ =>

=> вычеркив. 1 строку и в A, и в B

2) в A: 4 строка $< \frac{1}{2}$ (2 стр.) $+ \frac{1}{2}$ (3 стр.) => .

=> вычеркив. 4 строку и в A, и в B.

← здесь не теряем сит. равнов. [при нестрогом доминировании можно вычеркнуть еще 3 и 4 столбцы, но попробуем так] [или 2 и 4 стол.] ?

Теперь рассм. такие матрицы:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{array}{c} \hat{p}_1 \\ 1-\hat{p}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

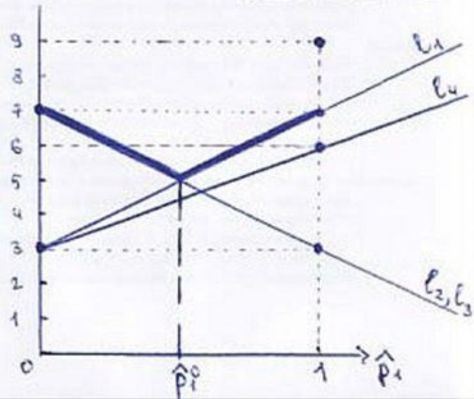
Строим прямые $l_j(\hat{p}_1) = \hat{p}_1 \cdot \hat{b}_{1j} + (1-\hat{p}_1) \cdot \hat{b}_{2j}$:

$l_1(\hat{p}_1) = 7\hat{p}_1 + 3(1-\hat{p}_1) = 4\hat{p}_1 + 3$

$l_2(\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 7(1-\hat{p}_1) = -4\hat{p}_1 + 7$

$l_3(\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 7(1-\hat{p}_1) = -4\hat{p}_1 + 7$

$l_4(\hat{p}_1) = 6\hat{p}_1 + 3(1-\hat{p}_1) = 3\hat{p}_1 + 3$



Рассм. верхнюю огибающую и точки излома (▬)

$\Downarrow$ 2 т. излома $\hat{p}_1^0 = l_1 \cap l_2,\ l_1 \cap l_3$

$(l_2 = l_3$ же$)$

Найдем $\hat{p}_1^0$:

$4\hat{p}_1 + 3 = -4\hat{p}_1 + 7$ =>

$=> 8\hat{p}_1 = 4 => \hat{p}_1^0 = \frac{1}{2} \to \underbrace{\hat{p}^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{\text{это для м. } \hat{A}}$

$$\hat{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} q^* & 1-q^* & 0 & 0 \end{matrix} \\ \left(\boxed{\begin{matrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} 6 & 6 \\ 7 & 7 \end{matrix} \right) \end{array}$$

$\underline{l_1 \cap l_2}$ => рассм. 1 и 2 столбцы

по строкам:

$$\begin{cases} 2\hat{q}^* + 4(1-\hat{q}^*) = \hat{v}_1 \\ 6\hat{q}^* + 1 - \hat{q}^* = \hat{v}_1 \end{cases} \Rightarrow 2\hat{q}^* + 4(1-\hat{q}^*) = 6\hat{q}^* + 1 - \hat{q}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\hat{q}^* + 4 = 5q^* + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\hat{q}^* = 3 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{3}{7} \Rightarrow \hat{q}^0 = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0\right) = q^0$$

$$\hat{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \hat{q}^* & 0 & 1-\hat{q}^* & 0 \end{matrix} \\ \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 6 \end{matrix}} \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 7 \end{matrix}} \begin{matrix} 6 \\ 7 \end{matrix} \right) \end{array}$$

$\underline{l_1 \cap l_3}$ => рассм. 1 и 3 столбцы

по строкам:

$$\begin{cases} 2\hat{q}^* + 6(1-\hat{q}^*) = \hat{v}_1 \\ 6\hat{q}^* + 7(1-\hat{q}^*) = \hat{v}_1 \end{cases} \Rightarrow 2\hat{q}^* + 6(1-\hat{q}^*) = 6\hat{q}^* + 7(1-\hat{q}^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\hat{q}^* + 6 = -\hat{q}^* + 7 \Rightarrow 3q^* = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \hat{q}^* < 0 \Rightarrow$ это точка не подходит

[т.е. если бы мы вычеркнули еще 2 и 4 столбцы, то не нашли бы ситуацию равновесия ?!]

$$\boxed{p^0} = (0, \hat{p}_1^0, \hat{p}_2^0, 0) = \underbrace{\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)}, $$

$$\boxed{q^0} = \underbrace{\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0\right)}$$

<u>с.р.</u>

[этот алгоритм вообще-то не находит <u>все</u> с.р., но требуют ли этого в этом задании?]

Вариант 24

Задача 1

Найдите нижнее и верхнее значение игры, все максиминные и минимаксные стратегии, а также все седловые точки (если $\exists$) матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 6 & 9 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 0 & 8 & 1 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 8 & 0 & 8 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$W(i) = \min\limits_{1 \le j \le 7} a_{ij} \Rightarrow W(i) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{v}} = \max\limits_{1 \le i \le 5} W(i) = \boxed{4} \Rightarrow$

нижн. знач. игры

$\Rightarrow \boxed{X^0 = \{1\}}$ ← максимин. страт.: $x^0 = 1$

где достиг. $\max W(i)$

$M(j) = \max\limits_{1 \le i \le 5} a_{ij} \Rightarrow M(j) = (9\ 5\ 8\ 9\ 9\ 6\ 7) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\overline{v}} = \min\limits_{1 \le j \le 7} M(j) = \boxed{5}$ ← верхн. знач. игры $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{Y^0 = \{2\}}$ ← минимакс. страт.: $y^0 = 2$

$\underline{v} = 4 < \overline{v} = 5 \Rightarrow$ нет седловых точек

Вариант 24

Задача 2

Найдите все ситуации равновесия игры на прямоугольнике:

$F(x,y) = -x^2 + 2xy - 3y^2 - x - y$

$G(x,y) = -x^2 - 4xy - 3y^2 + 2x - y$

$X = [-1, 2]$, $Y = [-1, 1]$

$\left.\begin{array}{l} F'_x = -2x + 2y - 1 \Rightarrow F''_{xx} = -2 < 0 \Rightarrow F \text{ - строго вогн. по } x \\ G'_y = -4x - 6y - 1 \Rightarrow G''_{yy} = -6 < 0 \Rightarrow G \text{ - строго вогн. по } y \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ с.р.

F, G - строго вогн. $\Rightarrow$ мн-ва наил. ответов состоят из един. эл-та

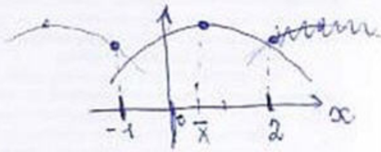
$\Downarrow$

$$\begin{cases} x(y): \max\limits_{-1 \le x \le 2} F(x,y) = F(x(y), y) \\ y(x): \max\limits_{-1 \le y \le 1} G(x,y) = G(x, y(x)) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x(y) = x \\ y(x) = y \end{cases} \Rightarrow (x^0, y^0) \text{ - с.р.}$$

Построим $x(y)$:



F - вогн. по x $\Rightarrow$

$\Rightarrow F'_x = -2x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{x} = y - \frac{1}{2}$

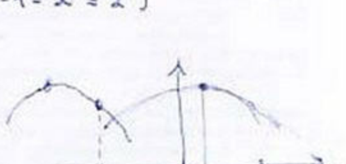
$\bar{x} \in [-1, 2] \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 \le y - \frac{1}{2} \le 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le y \le \frac{5}{2}$ $\searrow 1$

Ф-ия наил. ответа для 1ого игрока:

$$\underline{x(y)} = \begin{cases} -1, \text{ если } -1 \le y < -\frac{1}{2} & (\text{т.е. } \bar{x} < -1) \\ y - \frac{1}{2}, \text{ если } -\frac{1}{2} \le y \le 1 & (\text{т.е. } -1 \le \bar{x} \le 2) \end{cases}$$

Построим $y(x)$:



G - вогнут. по y $\Rightarrow$

$\Rightarrow G'_y = -4x - 6y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{y} = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$

$\bar{y} \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \le -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \le 1 \Rightarrow$

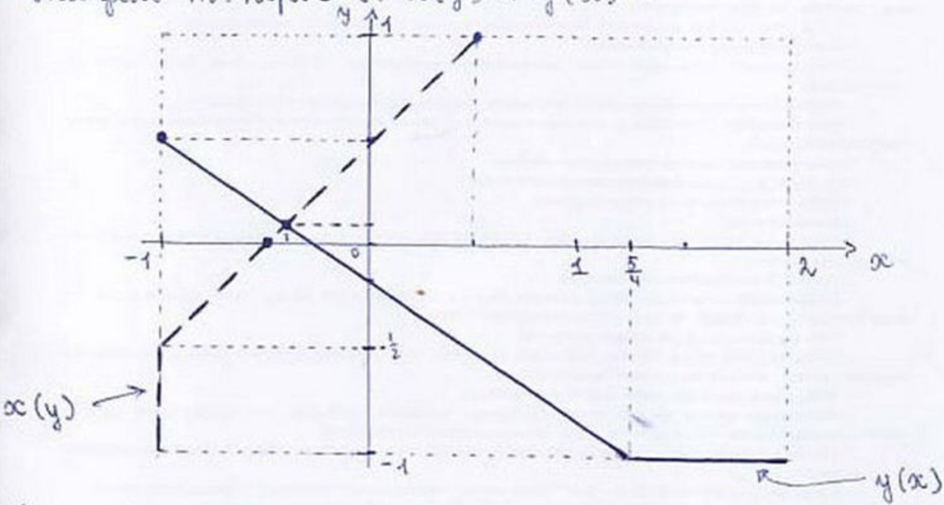
$\Rightarrow -\frac{5}{6} \le -\frac{2}{3}x \le \frac{7}{6} \Rightarrow \underbrace{-\frac{7}{4}}_{<-1} \le x \le \frac{5}{4}$

$\bar{y} < -1 \Rightarrow -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} < -1 \Rightarrow -\frac{2}{3}x < -\frac{5}{6} \Rightarrow x > \frac{5}{4}$

Ф-ия наил. ответа для 2его игрока:

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}, \text{ если } -1 \le x \le \frac{5}{4} \\ -1, \text{ если } \frac{5}{4} < x \le 2 \end{cases}$$

Найдем т. пересеч. $x(y)$ и $y(x)$:



$$\left(\begin{array}{l} y(-1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ y(\frac{5}{4}) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{6} = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = -1 \end{array} \right)$$

т. пересеч.:

$$\begin{cases} y - \frac{1}{2} = x \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\underbrace{(x^0, y^0)} = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{10})$ - ситуация равновесия

Вариант 24

Задача 3

Решите игру Γ_2 для биматричной игры Γ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$G_2 = \max\limits_{1\le j\le 5} \min\limits_{1\le i\le 5} b_{ij}$

$\min\limits_{1\le i\le 5} b_{ij} = (0\ 0\ 0\ 0\ 0) \Rightarrow G_2 = 0 \Rightarrow E = \{1,2,3,4,5\}$

$D = \{(i,j) \mid b_{ij} > \underset{=0}{G_2}\} \to$ см. м. B – мн-во D обведено

$\underbrace{K} = \max\limits_{(i,j)\in D} a_{ij} = \underbrace{6}$

обведем мн-во в м. A, соотв. $(i,j)\in D$

$M = \min\limits_{j\in E} \max\limits_{1\le i\le 5} a_{ij} = \min\limits_{1\le j\le 5} \max\limits_{1\le i\le 5} a_{ij}$

$\max\limits_{1\le i\le 5} a_{ij} = (5\ 4\ 6\ 6\ 6) \Rightarrow \underbrace{M = 4}$

$4 = M < K = 6$

$$\left[\begin{array}{l} f^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, \text{ если } y = y^\varepsilon & \leftarrow \text{т.е. } G(x^\varepsilon, y^\varepsilon) > G_2 \\ f^M(y), \text{ если } y \ne y^\varepsilon & \leftarrow \text{т.е. } G(f^M(y), y) \le G_2 \end{cases} \\ (x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in D \end{array}\right.$$

наим. гарант. выигр. 1ого игрока:

$F_2 = \max[K, M] = 6$

Пусть, F_2 реализуется в a_{13}

$$f^\varepsilon(j) = \begin{cases} 1, \text{ если } j = 3 \\ 4, \text{ если } j = 1 \\ 3, \text{ если } j = 2 \\ 1, \text{ если } j = 4 \\ 2, \text{ если } j = 5 \end{cases}$$

номер i наим. эл-та в соотв. столбце м. B

???